

Varianta 97

Subiectul I

- a) $\operatorname{Re}(z) = 2$.
- b) $P = 15$.
- c) $2x + 2y = 6$.
- d) $1 + i^3 + i^6 + i^9 + i^{12} = 1$
- e) $R = 5$.
- f) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.

- a) $n = 7$.
- b) punctul căutat este $A(3, 9)$.
- c) $a = -18$.
- d) $e = -14$.
- e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2$.
- b) $f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12$.
- d) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -3$.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{109}{4}$.

Subiectul III

- a) $f = X^2 - 5X \in \mathbb{Z}[X]$ și $f(5) = 0$.
- b) Fie $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ și $x_2 = 1 - \sqrt{3}$. Atunci ecuația de gradul II care are soluțiile x_1 și x_2 este $x^2 - 2x - 2 = 0$. Considerăm polinomul $f = X^2 - 2X - 2$. Deci $f \in \mathbb{Z}[X]$ și $f(1 + \sqrt{3}) = 0$, rezultă că $1 + \sqrt{3} \in B$.
- c) $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1 x_2 = m^2 - 3n^2$. Ecuația de gradul II cu soluțiile x_1 și x_2 este $x^2 - 2mx + (m^2 - 3n^2) = 0$
- d) Demonstrăm prin inducție matematică

Notăm $P(n): (2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n \sqrt{3}$, $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Pentru $n = 1$ $P(1): (2 - \sqrt{3})^1 = A_1 - B_1 \sqrt{3}$ (A) pentru $A_1 = 2 \in \mathbb{Z}$, $B_1 = -1 \in \mathbb{Z}$

Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ propoziție adevărată.

Deci $(2 - \sqrt{3})^k = A_k - B_k \sqrt{3}$, $A_k, B_k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^{k+1} &= (2 - \sqrt{3})^k (2 - \sqrt{3}) = (A_k - B_k \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = \\ &= (2A_k + 3B_k) - \sqrt{3}(A_k + 2B_k) = A_{k+1} - \sqrt{3}B_{k+1}, \text{ cu } A_{k+1} = 2A_k + 3B_k \in \mathbb{Z} \text{ și } \\ B_{k+1} &= A_k + 2B_k \in \mathbb{Z}. \text{ Deci } P(k+1) \text{ este propoziție adevărată.} \end{aligned}$$

Folosind metoda inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este propoziție adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(a) = 0$. Considerăm g astfel încât $g(x) = f(x - k)$. Rezultă că $g \in \mathbb{Z}[X]$ și $g(a + k) = f(a) = 0$. Prin urmare $a + k \in B$.

f) Fie $x_1 = 2 - \sqrt{3}$. Din punctul c) rezultă că $x_1 \in B$.

Folosind punctul **d)** și **c)** rezultă $x_1^n \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $(2 - \sqrt{3})^{11} \in B$.

$$\text{Dar } (2 - \sqrt{3})^{11} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{11}} < \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048} < \frac{1}{2007}.$$

$$\text{Deci } x_1^{11} \in B \cap \left(0, \frac{1}{2007}\right).$$

g) Presupunem contrariul $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in B$, deci există $f = x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. Rezultă $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + b = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= -b - 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow a^2(5 + 2\sqrt{6}) = b^2 + (5 + 2\sqrt{6})^2 + 2b(5 + 2\sqrt{6}) \Rightarrow \\ \Rightarrow 5a^2 + 2a^2\sqrt{6} &= b^2 + 49 + 10b + \sqrt{6}(20 + 4b). \end{aligned}$$

$$\text{Obținem } \begin{cases} 5a^2 = b^2 + 49 + 10b \\ 2a^2 = 20 + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 10 + 2b \\ b^2 = 1 \end{cases}.$$

Dacă $b = 1 \Rightarrow a^2 = 12$ (fals). Dacă $b = -1 \Rightarrow a^2 = 8$ (fals), deoarece $a \in \mathbb{Z}$.
Deci presupunerea făcută este falsă.

Subiectul IV

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = +\infty \Rightarrow x = 0$ este asimptotă verticală.

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}, \forall x \in (0, \infty).$$

$$\text{c) } a_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1.$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(n+1)^2}} = e^{-1}.$$

$$\text{f) } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^2 (x^{-2} - (x+1)^{-2}) dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \int_1^n f(x) dx &= \int_1^n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^n (x^{-2} - (x+1)^{-2}) dx = \\ &= \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Atunci } \int_1^n f(x) dx - a_n + \frac{1}{2} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\text{Atunci limita cerută este } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{n(n+1)^2} = -1.$$